



---

**Original Article: IPOTESI SULLA SEMPLIFICAZIONE DEI SISTEMI  
SOVRADETERMINATI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI**

**Citation**

Zaytsev M. L., Akkerman V.B. Ipotesi sulla semplificazione dei sistemi sovradeterminati di equazioni differenziali. *Italian Science Review*. 2014; 10(19). PP. 113-124.  
Available at URL: <http://www.ias-journal.org/archive/2014/october/Zaytsev.pdf>

**Authors**

M. L. Zaytsev, Nuclear Safety Institute of the Russian Academy of Sciences, Russia.  
V.B. Akkerman, West Virginia University, USA.

Submitted: September 20, 2014; Accepted: September 27, 2014; Published: October 9, 2014

**Astratto**

E' dimostrato che qualsiasi sistema indipendente equazione sovradeterminato di equazioni differenziali può essere ridotto in dimensione, che rende il sistema facile da simulare. In particolare, invece di sistemi tridimensionali di equazioni può essere risolto bidimensionale, unidimensionale, ecc. Trovato una condizione sufficiente per l'indipendenza della equazione di vincolo. Esempi numerici e risultati fisici.

**1. Introduzione**

Soluzioni esatte delle equazioni differenziali della fisica matematica hanno svolto e continuano a svolgere un ruolo fondamentale nella comprensione delle caratteristiche qualitative di molti fenomeni e processi in vari campi della scienza e della tecnologia (cfr. [1]). Possiamo dire che l'incapacità di risolvere queste equazioni analiticamente è un ostacolo per l'ulteriore studio di molti fenomeni fisici e la loro applicazione pratica. Soluzioni esatte delle equazioni non lineari dimostrare e permettere di comprendere il meccanismo di tali effetti non lineari complessi come la localizzazione spaziale dei processi di trasporto, onde di combustione, reazioni esplosive, o la mancanza di molteplicità di

stati stazionari e altri. Interesse scientifico anche ricerca di soluzioni di equazioni differenziali che non hanno una chiara fisica l'applicazione. Tuttavia, questi esempi possono essere usati con successo come problemi "di prova" durante la convalida e valutare l'accuratezza dei vari metodi numerici, asintotici e approssimative, che, a sua volta, permetterà di studiare i problemi più complessi hanno calore e di massa trasferimento.

Tuttavia, trovare le esatte soluzioni analitiche a molti problemi di fisica matematica non è sempre possibile. Pertanto è necessario ricorrere a dirigere simulazione numerica per ottenere risultati numerici approssimati. Nella simulazione, in problemi pratici spesso devono essere grigliato numerico molto fine nello spazio e nel tempo, che richiede molta potenza di calcolo e di tempo (vedi. [2]). Come risultato, una delle possibili uscite è grande interesse in vari modi dell'annuncio, in particolare, il sistema completo delle equazioni idrodinamiche in termini di un sistema di equazioni sulla superficie (vedi. [3-7]). Tale procedura può ridurre la dimensione del problema per uno, che riduce sensibilmente la potenza di calcolo necessaria. Noto classiche equazioni per

descrivere il flusso bidimensionale nel piano con l'aiuto delle equazioni scritte sul confine di [8-12]. Ad esempio, per un irrisorio problema viscosità di descrivere il potenziale flusso nel piano si riduce a un'equazione integrale sul contorno (il problema di Dirichlet, Neumann) [1, 8-10] Questa equazione riguarda le componenti tangenziali e normali della velocità. Conoscere uno di loro sul confine del corpo, è possibile definire tutto il flusso esterno [8-10]. Questo vale anche per il caso di viscosità molto elevato ("creeping flow"). Strisciante flussi viscosi - un flusso lento, in cui tutte le caratteristiche idrodinamiche sono determinate da stress viscoso e gli effetti inerziali sono trascurabili (accelerazione sono così piccoli che vengono trascurati) [13]. Essa si verifica durante ghiacciai (viscosità ghiaccio è così alta che molti chilometri massa di ghiaccio in movimento molto lentamente), la lubrificazione dei dispositivi tecnici, il moto di piccole particelle in sospensione, ecc Pressione e vorticità in strisciante flussi sono funzioni armoniche, e quindi la loro presenza in tutto lo spazio può anche essere ridotto a una equazione integrale sul confine.

In [14] un metodo abbastanza comune di ridurre la dimensionalità dei sistemi sovradeterminati di equazioni differenziali. Ciò consente, ad esempio, di ridurre le equazioni idrodinamiche in termini di un sistema di equazioni sulla superficie. Questo documento propone una semplificazione (modifica) del metodo. Il numero di calcoli ed equazioni dimensione ridotta è significativamente ridotta, ma allo stesso tempo è necessario che il sistema originale era una "forma normale" ed un determinante non era identicamente uguale a zero. Vi presentiamo l'idea e dare esempi numerici e risultati fisici

## 2. L'idea di base di

Ad esempio, si consideri il seguente sistema di due equazioni differenziali lineari, sovradeterminato da una sola equazione:

Esempio 1. (1), (2), (3).

Questo sistema ha una soluzione totale pari a zero. Sostituito (3), l'espressione per il derivato  $\partial G/\partial x$  della formula (1):

$$\frac{\partial H}{\partial t} - x \left( \frac{\partial H}{\partial t} - H \right) = 0 \text{ o (4).}$$

Differenziare (4) da  $x$ :

$$-\frac{\partial H}{\partial t} + (1-x) \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial x} + H + x \frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

o dopo la sostituzione derivato  $\partial H/\partial x$  della formula (2)

(5)

Fissare un punto  $x$ . Poi si ottiene un sistema di equazioni differenziali ordinarie ha (4) e (5), in continua evoluzione rigorosamente punto  $x$ .

Ora distinguiamo (5) da  $x$ : (6)

Dopo sostituendo nella (6)  $\partial G/\partial x$  e  $\partial H/\partial x$  derivati delle formule (1) e (2) troviamo (7)

Esprimiamo i derivati  $\partial H/\partial t$ ,  $\partial^2 H/\partial t^2$ ,  $\partial^3 H/\partial t^3$ ,  $\partial^2 G/\partial t^2$  delle formule (4) e (5). abbiamo, (8), (9), (10), (11).

Sostituendo la (8) - (11) (7). Di conseguenza, (12).

Noi fissiamo di nuovo un punto  $x$ . Abbiamo già sistema di equazioni differenziali ordinarie (4), (5) e (12), punto strettamente evolutivo sovradeterminato  $x$ . Cerchiamo di trovare una soluzione. Noi distinguiamo (12) e sostituire in (8) - (11). Allora otteniamo (13).

Fate lo stesso con (13). Avere (14).

Così, abbiamo trovato un sistema di tre equazioni lineari (12) - (14) delle tre incognite  $\partial G/\partial t$ ,  $G$  e  $H$  che ha la soluzione ovvia

$$H = 0 \text{ e}$$

$$G = \text{Const exp}(t) \text{ (} \partial G/\partial t - G = 0 \text{)}.$$

Pertanto, dopo aver sostituito in (1) - (3) troviamo che oltre alla soluzione di zero, sistema sovradeterminato di equazioni (1) - (3) ha anche una soluzione esponenziale. Altre soluzioni del sistema (1) - (3) non è.

Consideriamo ora il sistema di  $p$  equazioni differenziali alle derivate parziali

del primo ordine, un sovradeterminato una equazione indipendente (su qualsiasi decisione, per esempio): (15), (16).

Si procede  $M$  quindi al punto di un sistema di coordinate  $(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, \mathbf{n})$  su una superficie fissa (vedi. Fig. Uno). Quindi l'equazione (15), (16) può essere scritta come (17), (18).

Esprimere l'equazione (17), i derivati normali  $\partial S_k / \partial n$  esplicitamente (19).

Noi sostituiamo le loro espressioni (19) in (18). poi (20).

Differenziare (20) nella direzione  $\mathbf{n}$  e sostituiamo le loro  $\partial S_k / \partial n$  espressioni da (19). Poi scopriamo che

$$\cdot \quad (21)$$

Fare di nuovo la  $p$  stessa procedura. Ottenere  $p$  equazioni della forma sulla superficie (22).

Abbiamo trovato un sistema chiuso di  $p$  equazioni differenziali della superficie (22) esattamente lungo il bordo della superficie (vedi. Fig. One) e lo stesso numero di variabili  $S_k, k=1...p$ , evoluzione nel tempo. Così abbiamo dimostrato il seguente teorema.

**Teorema 1.** Ogni sistema di  $p$  equazioni differenziali alle derivate parziali del primo ordine (15), che descrive le soluzioni evolvono nel tempo nello spazio euclideo,  $S_k(\mathbf{r}, t), k=1...p$ , e ridefinito da qualsiasi equazione differenziale (16) del primo ordine, si può convertire in un sistema di  $p$  equazioni differenziali e lo stesso numero di incognite,  $S_k(\mathbf{r}, t), k=1...p$ , per qualsiasi superficie fissa, se il sistema di coordinate  $(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, \mathbf{n})$  sulla superficie tutte le normali derivati  $\partial S_k / \partial n$  del sistema (15) può essere espressa esplicitamente come funzione delle variabili definite esclusivamente sulla superficie in questione (19).

Formalmente, nulla impedisce procedura analoga a ricevere più di superficie delle

equazioni (22), vale a dire trovare un sistema di equazioni sovradeterminato ha su di esso. Pertanto, per ridurre la dimensionalità alla superficie, ecc fino alla soluzione analitica. Tuttavia, questo non significa che lo stesso procedimento può essere trovato in qualsiasi soluzione analitica di un sistema sovradeterminato di equazioni. Ad esempio, il seguente sistema di equazioni sovradeterminato ha la soluzione generale  $\alpha = \exp(x-t)$ .

Esempio 2. (23), (24).

Tuttavia, un'ulteriore riduzione di una dimensione non può andare avanti.

Teoricamente possibile caso seguente. Si consideri il sistema  $p$  di equazioni differenziali alle derivate parziali del primo ordine, non un override qualsiasi equazione (15). Fissare qualche funzione sconosciuta  $S_p$  come una funzione di parametro, e si ricercheranno le altre funzioni sconosciute. Quindi, formalmente, il sistema di equazioni (15) per quanto riguarda le restanti incognite sarà ridefinito, e abbiamo proposto un metodo per ridurre la sua dimensione fino alla soluzione analitica. Troviamo che l'ignoto rimanente (e loro derivati) saranno  $S_p$  funzioni e dei suoi derivati, e per la maggior parte la funzione di parametro  $S_p$  separeremo equazione (o più equazioni) a derivate parziali. Se, per qualsiasi motivo, questa funzione  $S_p$  può essere determinato in modo indipendente, le restanti incognite (e / o loro derivati) saranno immediatamente scaricate attraverso di essa.

introduciamo la notazione (25).

Noi rappresentiamo la vista (25) l'espressione (19), (20) nella forma (26), (27).

Differenziare (27) nella direzione e l'espansione  $\mathbf{n}$  conseguente indicano i componenti che contengono i più alti derivate temporali  $t$  (28). o, tenendo conto (26) (29).

Fare di nuovo la stessa  $p$  procedura. Poi il sistema di equazioni (22), che sono evidenziati in termini di avere maggiori derivate temporali  $t$ , può essere scritto come (30).

Noi distinguiamo ogni  $l$  equazione ritracciamento del sistema (30) rispetto al tempo  $t$  ( $p-l$ ) di nuovo. Quindi si ottiene il seguente sistema (31).

Sistema di equazioni di superficie (31) è lineare rispetto ai derivati di tempo maggiori  $\partial^p S_v / \partial t^p$ ,  $v=1...p$ . La condizione che questi derivati possono essere espressi in modo esplicito (31), come segue (32) dove (33), (34).

In questo caso (31) può essere scritta come (35).

Così, abbiamo dimostrato la seguente affermazione.

**Teorema 2.** Se per un sistema di equazioni differenziali parziali del primo ordine (15), che descrivono le soluzioni evolvono nel tempo nello  $S_k(\mathbf{r}, t)$ ,  $k=1...p$ , spazio euclideo, e ridefinizione di alcuni equazione differenziale (16) del primo ordine, per una condizione superficie fissa (32), poi puoi convertirlo in un sistema di  $p$  equazioni differenziali e lo stesso numero di incognite  $S_k(\mathbf{r}, t)$ ,  $k=1...p$ , sulla superficie in questione, i derivati più elevati rispetto al tempo della volontà chiaramente espressa  $S_k(\mathbf{r}, t)$  in termini di tutte le altre incognite.

Il sistema di equazioni della superficie (35) è già possibile mettere il corrispondente problema di Cauchy. Secondo il generale teorema di Cauchy-Kowalewski, questo problema nel caso di analiticità di tutte le funzioni in questione ha una soluzione locale unica [15, 16]. Vediamo che se la condizione (32), le condizioni al contorno non hanno bisogno di chiedere una superficie infinita aperto.

Dalle formule (19) e (35) si vede che se conosciamo ad un certo punto della superficie del  $\partial^j S_v / \partial t^j$ ,  $j=0...p-1$ ,

$v=1...p$ , valore, allora sappiamo tutti i derivati normali, in  $\partial^j S_v / \partial n^j$ ,  $v=1...p$ ,  $j=0...p$  qualsiasi punto della superficie in questione. Di conseguenza, rendendo la serie di Taylor, si può trovare la distribuzione di quantità,  $S_v(\mathbf{r}, t)$ ,  $v=1...p$ , non solo su questa superficie, ma anche nel volume esterno almeno in prossimità della superficie.

Per il nostro esempio, (1) - (3) (Esempio 1) corrispondente determinante ha la forma (36).

(Vedi figura 2.) - Per tener conto della superficie in movimento  $-\mathbf{Vn}$ , si muove con una velocità, in cui l'unità normale alla superficie,  $V = F_t / |\nabla F|$  è  $\mathbf{n} = \nabla F / |\nabla F|$  sufficiente utilizzare  $F(x_1, \dots, x_m, t) = 0$  la seguente relazione ovvia alla superficie: (37).

Invece del sistema di equazioni (22) è un sistema di equazioni  $p^2 + p$  (19), (22) e (37) e  $p^2 + p$  sconosciuto  $\partial^j S_v / \partial t^j$ ,  $j=0...p$ ,  $v=1...p$ . Pertanto, la seguente affermazione è vera.

**Teorema 3.** Qualsiasi sistema di  $p$  equazioni differenziali alle derivate parziali del primo ordine (15), che descrivono le soluzioni evolvono  $S_k(\mathbf{r}, t)$ ,  $k=1...p$ , nel tempo nello spazio euclideo, e ridefinito da qualsiasi equazione differenziale (16) del primo ordine, si può convertire in un sistema  $p^2 + p$  di equazioni differenziali e  $p^2 + p$  incognite  $\partial^j S_v / \partial t^j$ ,  $j=0...p$ ,  $v=1...p$ , qualsiasi superficie in movimento  $F(x_1, \dots, x_m, t) = 0$ , se il sistema di coordinate  $(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, \mathbf{n})$  sulla superficie tutte le normali derivati  $\partial S_k / \partial n$  del sistema (15) possono essere espresse esplicitamente come funzione delle variabili definite esclusivamente sulla superficie in questione (19). Se, inoltre, la condizione di superficie (32), i derivati nel tempo,

$d/dt(\partial^j S_v / \partial t^j)$ ,  $j=0\dots p$ ,  $v=1\dots p$ , saranno espresse in modo esplicito attraverso altre incognite.

Diamo ora un semplice esempio di idrodinamica, quando il metodo precedente funziona. Si consideri l'equazione di Laplace che descrive il potenziale flusso di un fluido incompressibile nel caso bidimensionale [8]

Esempio 3.

(38).

Questa equazione ha ovviamente una  $\varphi = Ax + Ay$  soluzione in cui che  $A = const$  soddisfa (39)

Riscriviamo (38) nella forma (40), (41).

Quindi l'equazione (39) può essere scritta come (42).

Noi distinguiamo l'espressione (42) e sostituendo invece le derivate parziali dalle loro espressioni da (40) e (41) (43).

Come risultato, abbiamo un sistema di ridotta dimensionalità di due equazioni e due incognite (42), (43), dove ci sono solo derivati  $x$ . Così, in una particolare soluzione, nonché qualsiasi altra  $\varphi = Ax + Ay$  soluzione particolare rispondenti (39), abbiamo dimostrato che la dimensione è ridotta.

3. Sistemi Override di equazioni differenziali aumentando le loro dimensioni

Consideriamo ora il sistema di  $p$  equazioni differenziali parziali del primo ordine nello spazio  $(\mathbf{r}, t)$  (44).

Si consideri la funzione (45).

Ovviamente, le seguenti relazioni (46), (47).

Pose (46), (47) nell'espressione (44). Quindi si ottiene (48).

Se consideriamo (48), come un sistema di  $p$  equazioni nello spazio  $(\mathbf{r}, t, \xi)$  per le  $p-1$  funzioni incognite,  $U(\mathbf{r}, t, \xi), S_v(\mathbf{r}, t, \xi), v=3\dots p$ , allora avremo una equazione è sovradeterminato sistema di equazioni differenziali. Questo sistema di equazioni (48) contiene effettivamente una soluzione del sistema

(44). Nulla impedisce di considerare la funzione (49) e usarlo per convertire un sistema simile (44) per il sistema di equazioni (50) che contiene una sola funzione sconosciuta  $U(\mathbf{r}, t, \xi)$ .

Se il sistema di equazioni (44) sono indicati Cauchy dati iniziali [15,16] (51) deve essere preso in considerazione quando si riduce la dimensione può essere, per esempio, in (44) per effettuare la sostituzione di funzioni incognite (52).

Poi (53).

Se è rigorosamente dimostrato quello ottenuto con il metodo sopra il sistema di superficie di equazioni è corretta e coerente, allora non c'è nulla al flusso esterno si tiene conto: a) i termini delle condizioni iniziali, b) attraverso le condizioni al contorno, c) attraverso la struttura stessa del l'override del sistema originale di equazioni differenziali del volume, vale a dire attraverso il metodo stesso, che è stata ottenuta con ulteriori relazione indipendente. Altro modo logico per spiegare il flusso esterno non è.

Lasciate instabile flusso infinito di superfici in movimento. Usando il metodo di sostituzione, per la sua generalità, possiamo convertire tutti non stazionario equazione sovradeterminato di sistema dimensionale ridotto, un gran numero di equazioni "fisse", dove le derivate temporali sono assenti. Poi, il confine flusso esterno è determinato e solo le condizioni al contorno in superficie, in qualsiasi momento queste equazioni "fisse". Utilizzando il metodo di sostituzione selezionata (in particolare ulteriori variabili e loro derivati) in qualsiasi momento, conoscendo le informazioni sulla superficie in questione può, risolvendo il sistema di equazioni per determinare l'intera filettatura esterna. Superficie, muovendo secondo le equazioni ottenuti da un metodo di sostituzione, attraverso questo meccanismo può spiegare il flusso esterno in sé, cioè, in termini di quantità definite su questa superficie.

4. Conclusione

Riduzione della dimensione è un compito importante, che consente, in particolare, per semplificare i calcoli di flussi idrodinamici [3-7]. In generale, le applicazioni nella progettazione di motori a combustione interna, motori a razzo, turbine a gas e altri., Questo studio è necessario ridurre la potenza di calcolo necessaria per risolvere questi problemi al momento. In particolare, la riduzione della dimensione può consentire di ridurre la durata di tali calcoli per uno o più ordini.

Proposto in questo documento, il metodo è applicabile a qualsiasi sistema di equazioni differenziali, e ti permette di fare progressi significativi nel risolvere il problema generale della risoluzione su piccola scala nel tempo e nello spazio. Ed è di grande utilità pratica, per esempio quando la modellazione della circolazione fronte di fiamma turbolenta (vedi. [17]).

Si noti che in questo documento, a differenza [14] ha trovato una condizione sufficiente per l'equazione di vincolo indipendenza (32), che, tuttavia, non è necessario, e quindi può teoricamente essere attenuato in qualche modo. Realizzato verifica di questa condizione ad alcuni esempi.

Questo metodo può anche essere utilizzato per individuare eventuali soluzioni particolari di equazioni differenziali. Abbastanza per scrivere qualche equazione di vincolo aggiuntivo, che è soddisfatta, per esempio, per ogni soluzione particolare. Se è possibile ridurre gradualmente la dimensione del sistema sovradeterminato risultante fino alla soluzione analitica, troviamo particolari soluzioni del sistema originale di equazioni differenziali per cui l'equazione di comunicazione.

**References:**

1. Tikhonov A.A. 1966. Samara Equations of mathematical physics.

2. Samarsky A.A., Popov Yu.P. 1980. Difference methods for solving problems of gas dynamics.
3. Bychkov V.V. 1998. Nonlinear equation for a curved stationary flame and the flame velocity. V. 10. P.2091.
4. Bychkov V., Zaytsev M., Akkerman V. 2003. Coordinate-free description of corrugated flames with realistic gas expansion. V. 68. P. 026,312.
5. Zaitsev M.L., Ackerman V.B. 2009. Nonlinear theory of hydrodynamic motion surfaces breaks. V. 135. P. 800-819.
6. Sivashinsky G.I. 1977. Nonlinear analysis of hydrodynamics instability in laminar flames. Derivation of basic equations. V. 4. P. 1177.
7. Frankel M. 1990. An equation of surface dynamics modeling flame fronts as density discontinuities in potential flows. V. 2. P. 1879.
8. L.D. Landau, E.M. Lifshitz. 1986. Theoretical Physics: Hydrodynamics.
9. L.I. Sedov. 1978. Continuum Mechanics. V.1,2.
10. Loitsyanskii L.G. 1987. Fluid Mechanics.
11. M. Van-Dyke. 1986. Album of liquid and gas.
12. J. Meys. 1974. Theory and problems of continuum mechanics.
13. Happel D., Brenner G. 1976. Hydrodynamics at low Reynolds numbers.
14. Ackerman V.B., Zaitsev M.L. 2011. Reduction of dimension in the hydrodynamic equations, Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. pp. 1518-1530.
15. R. Curant. 1964. Partial Differential Equations.
16. I.G. Petrovskii. 1961. Lectures on partial differential equations.
17. Zel'dovich Ya.B., Barenblatt G.I., Librovich V.B., Makhviladze G.M. 1980. Mathematical theory of combustion and explosion.

Figura 1. Superficie stabile.

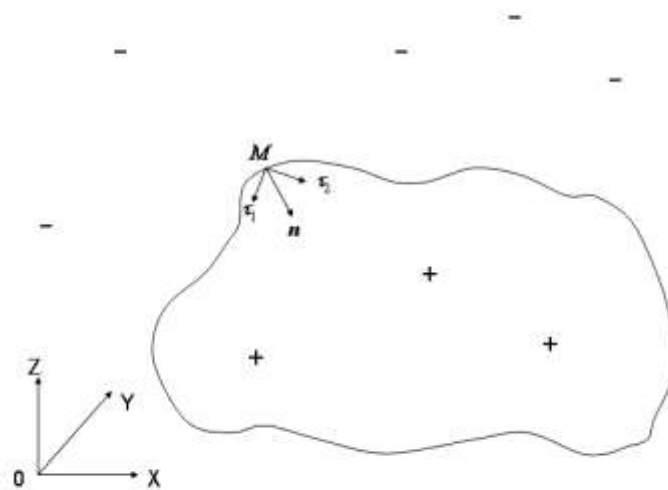
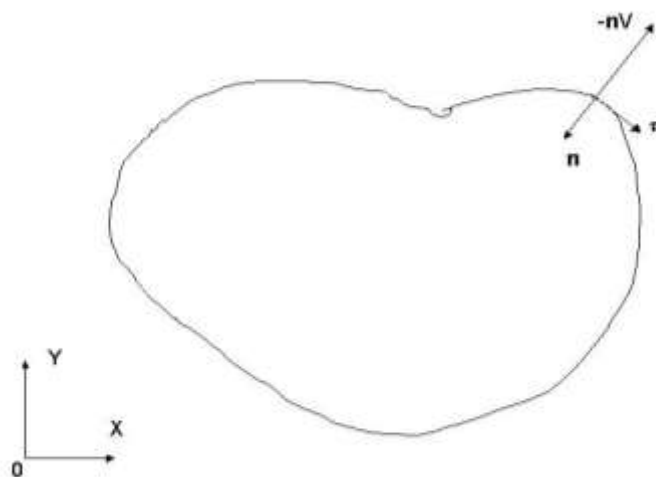


Figura 2. Superficie mobile  $F(x_1, \dots, x_m, t) = 0$ .



$$\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial x} = H \quad (1)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} = G \quad (2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} - x \frac{\partial G}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

$$(1-x) \frac{\partial H}{\partial t} + xH = 0 \quad (4)$$

$$(x-1) \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + (1-2x) \frac{\partial G}{\partial t} + xG + \frac{\partial H}{\partial t} - H = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + (x-1) \frac{\partial^3 G}{\partial t^2 \partial x} - 2 \frac{\partial G}{\partial t} + (1-2x) \frac{\partial^2 G}{\partial t \partial x} + G + x \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

$$(x-1) \frac{\partial^3 H}{\partial t^3} + (2-3x) \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - 4 \frac{\partial G}{\partial t} + (3x-1) \frac{\partial H}{\partial t} + 2G - xH = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{x}{(x-1)} H \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{x^2}{(x-1)^2} H \quad (9)$$

$$\frac{\partial^3 H}{\partial t^3} = \frac{x^3}{(x-1)^3} H \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \frac{(2x-1)}{(x-1)} \frac{\partial G}{\partial t} - \frac{x}{(x-1)} G - \frac{1}{(x-1)^2} H \quad (11)$$



$$\frac{\partial G}{\partial t} - G - \frac{1}{(x-1)} H = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} - G + \frac{(x+1)}{(x-1)x} H = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} - G + \frac{1}{(x-1)} H = 0 \quad (14)$$

$$H_k \left( S_v, \frac{\partial S_v}{\partial \mathbf{r}}, \frac{\partial S_v}{\partial t} \dots \right) = 0, \quad v=1\dots p, \quad k=1\dots p, \quad (15)$$

$$G \left( S_v, \frac{\partial S_v}{\partial \mathbf{r}}, \frac{\partial S_v}{\partial t} \dots \right) = 0 \quad (16)$$

$$H_k \left( S_v, \frac{\partial S_v}{\partial \tau_1}, \frac{\partial S_v}{\partial \tau_2}, \frac{\partial S_v}{\partial n}, \frac{\partial S_v}{\partial t} \dots \right) = 0, \quad v=1\dots p, \quad k=1\dots p, \quad (17)$$

$$G \left( S_v, \frac{\partial S_v}{\partial \tau_1}, \frac{\partial S_v}{\partial \tau_2}, \frac{\partial S_v}{\partial n}, \frac{\partial S_v}{\partial t} \dots \right) = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial S_k}{\partial n} = F_k \left( S_v, \frac{\partial S_v}{\partial \tau_1}, \frac{\partial S_v}{\partial \tau_2}, \frac{\partial S_v}{\partial t} \dots \right), \quad v=1\dots p, \quad k=1\dots p \quad (19)$$

$$G^{(1)} \left( S_v, \frac{\partial S_v}{\partial \tau_1}, \frac{\partial S_v}{\partial \tau_2}, \frac{\partial S_v}{\partial t} \dots \right) = 0 \quad (20)$$

$$G^{(2)} \left( S_v, \frac{\partial^2 S_v}{\partial \tau_1 \partial t}, \frac{\partial^2 S_v}{\partial \tau_2 \partial t}, \frac{\partial^2 S_v}{\partial t^2} \dots \right) = 0 \quad (21)$$

$$G^{(1)} \left( S_v, \frac{\partial S_v}{\partial \tau_1}, \frac{\partial S_v}{\partial \tau_2}, \frac{\partial S_v}{\partial t} \dots \right) = 0,$$

..... (22)

$$G^{(p)}\left(S_v, \frac{\partial^p S_v}{\partial \tau_1 \partial t^{p-1}}, \frac{\partial^p S_v}{\partial \tau_2 \partial t^{p-1}}, \frac{\partial^p S_v}{\partial t^p} \dots\right) = 0.$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \alpha = 0. \quad (24)$$

$$A_v = \frac{\partial S_v}{\partial t}, \quad v = 1 \dots p. \quad (25)$$

$$\frac{\partial S_k}{\partial n} = F_k(A_v, \dots), \quad v = 1 \dots p, \quad k = 1 \dots p, \quad (26)$$

$$G^{(1)}(A_v, \dots) = 0. \quad (27)$$

$$\sum_{v_1=1}^p \frac{\partial G^{(1)}}{\partial A_{v_1}} \frac{\partial^2 S_{v_1}}{\partial n \partial t} + \dots = 0$$

(28)

$$\sum_{v_1, v_2=1}^p \frac{\partial G^{(1)}}{\partial A_{v_1}} \frac{\partial F_{v_1}}{\partial A_{v_2}} \frac{\partial^2 S_{v_2}}{\partial t^2} + \dots = G^{(2)}(\dots) = 0$$

(29)

$$\sum_{v_1, \dots, v_l=1}^p \frac{\partial G^{(1)}}{\partial A_{v_1}} \frac{\partial F_{v_1}}{\partial A_{v_2}} \dots \frac{\partial F_{v_{l-1}}}{\partial A_{v_l}} \frac{\partial^l S_{v_l}}{\partial t^l} + \dots = G^{(l)}(\dots) = 0, \quad l = 1 \dots p \quad (30)$$

$$\sum_{v_1, \dots, v_l=1}^p \frac{\partial G^{(1)}}{\partial A_{v_1}} \frac{\partial F_{v_1}}{\partial A_{v_2}} \dots \frac{\partial F_{v_{l-1}}}{\partial A_{v_l}} \frac{\partial^p S_{v_l}}{\partial t^p} + \dots = 0, \quad l = 1 \dots p \quad (31)$$

$$|a_{ji}| \neq 0 \quad (32)$$

$$a_{ji} = \sum_{v_1, \dots, v_{j-1}=1}^p \frac{\partial G^{(1)}}{\partial A_{v_1}} \frac{\partial F_{v_1}}{\partial A_{v_2}} \dots \frac{\partial F_{v_{j-1}}}{\partial A_i}, \quad j > 1 \quad (33)$$

$$a_{1i} = \frac{\partial G^{(1)}}{\partial A_i}, \quad j = 1 \quad (34)$$

$$\frac{\partial^p S_k}{\partial t^p} = Q_k \left( \frac{\partial^{p-1} S_v}{\partial t^{p-1}}, \frac{\partial^p S_v}{\partial \tau_1 \partial t^{p-1}} \dots \right), \quad v = 1 \dots p, \quad k = 1 \dots p \quad (35)$$

$$|a_{ji}| = \begin{vmatrix} 0 & (1-x) \\ (x-1) & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (36)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial^{j-1} S_v}{\partial t^{j-1}} \right) = \frac{\partial^j S_v}{\partial t^j} - V \frac{\partial^j S_v}{\partial t^{j-1} \partial n}, \quad j = 1 \dots p, \quad v = 1 \dots p \quad (37)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (38)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2A \quad (39)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad (40)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \psi \quad (41)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \psi = 2A \quad (42)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \quad (43)$$

$$H_k \left( \mathbf{r}, t, S_v, \frac{\partial S_v}{\partial \mathbf{r}}, \frac{\partial S_v}{\partial t} \dots \right) = 0, \quad v = 1 \dots p, \quad k = 1 \dots p \quad (44)$$

$$U(\mathbf{r}, t, \xi) = S_1(\mathbf{r}, t) + S_2(\mathbf{r}, t) \xi \quad (45)$$

$$S_2(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial U(\mathbf{r}, t, \xi)}{\partial \xi} \quad (46)$$

$$S_1(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}, t, \xi) - \frac{\partial U(\mathbf{r}, t, \xi)}{\partial \xi} \xi \quad (47)$$

$$H_k \left( \mathbf{r}, \xi, t, U, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial t}, \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \mathbf{r}}, \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial \mathbf{r}}, S_v, \frac{\partial S_v}{\partial \mathbf{r}}, \frac{\partial S_v}{\partial t} \dots \right) = 0, \quad v = 3 \dots p, \quad k = 1 \dots p \quad (48)$$

$$U(\mathbf{r}, t, \xi) = S_1(\mathbf{r}, t) + S_2(\mathbf{r}, t)\xi + \dots + S_p(\mathbf{r}, t) \frac{\xi^{p-1}}{(p-1)!} \quad (49)$$

$$H_k \left( \mathbf{r}, \xi, t, U, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial t}, \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \mathbf{r}}, \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial \mathbf{r}}, \dots, \frac{\partial^{p-1} U}{\partial \xi^{p-1}}, \frac{\partial^p U}{\partial \xi^{p-1} \partial \mathbf{r}} \dots \right) = 0, \quad k = 1 \dots p, \quad (50)$$

$$S_v \Big|_{t=0} = S_v^0(\mathbf{r}), \quad v = 1 \dots p \quad (51)$$

$$S_v = S_v^0(\mathbf{r}) S'_v, \quad v = 1 \dots p \quad (52)$$

$$S'_v \Big|_{t=0} = 1, \quad v = 1 \dots p. \quad (53)$$