Peer Reviewed, Open Access, Free Online Journal
Published monthly : ISSN: 2308-832X
Issue 10(19); October 2014

Original Article: GENERAZIONE DI PERMUTAZIONI CON LA FORMULA

Citation
Sdvizhkov O.A. Generazione di permutazioni con la formula. *Italian Science Review*. 2014; 10(19). PP. 303-305.
Available at URL: http://www.ias-journal.org/archive/2014/october/Sdvizhkov.pdf

Author
O.A. Sdvizhkov, Russian State University of Tourism and Service, Russia.

Submitted: October 2, 2014; Accepted: October 22, 2014; Published: October 31, 2014

§ 1. Ordine lessicografico

Algoritmi per la generazione di permutazioni indicate [1-5].

È facile notare che la matrice di permutazioni, seguendo in modo lessicografico, dà il seguente algoritmo.

Passo 1. Nella $k=1$ colonna 1 i valori $(n-1)!$ vengono scritti, $(n-1)!$ allora il valore 2, e così $(n-1)!$ via n, fino a valori, compreso, cioè, $a(i,1)=\left[\dfrac{i-1}{(n-1)!}\right]+1$, $i=\overline{1,n!}$ le parentesi quadre indicano la parte intera. Accetta = 2.

Fase 2. Nella colonna k sono scritti in modo $(n-k)!$ sequenziale sui valori minimi dell'ordine ξ del set, $\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{a(i,1),\ldots,a(i,k-1)\}$, $\xi=\overline{1,n-k+1}$ che si ripete una volta, le parentesi graffe indicano $\left\{\dfrac{i-1}{(n-k+1)!}\right\}=0$ la parte frazionaria.

Fase 3. Se $k<n$, poi $k:=k+1$ passo 2, altrimenti stop.

In virtù di questo algoritmo è il seguente teorema sugli elementi della permutazione, seguito nell'ordine lessicografico.

Teorema 1. Per gli elementi $a(i,j)$ di permutazioni nel seguente ordine lessicografico viene eseguita:
$a(i,1)=\left[\dfrac{i-1}{(n-1)!}\right]+1,\ i=\overline{1,n!}$ quando $\left\{\dfrac{i-1}{(n-j)!}\right\}\neq 0$.

allora $a(i,j)=a(i-1,j),\ j=\overline{2,n}$.
quando $\left\{\dfrac{i-1}{(n-j)!}\right\}=0$, $\left\{\dfrac{i-1}{(n-j+1)!}\right\}\neq 0$,

allora
$a(i,j)=\min((\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{a(i,1),\ldots,a(i,j-1)\})\setminus$ q $\setminus\{1,2,\ldots,a(i-1,j)\})$
uando $\left\{\dfrac{i-1}{(n-j)!}\right\}=0$, $\left\{\dfrac{i-1}{(n-j+1)!}\right\}=0$,

allora $a(i,j)=\min(\{1,2,\ldots,n\}\setminus$.
$\setminus\{a(i,1),\ldots,a(i,j-1)\})$

Troviamo, per il Teorema 1, per esempio, il 12 ° permutazione degli elementi 1, 2, 3, 4 seguendo permutazioni in ordine lessicografico, dato che la permutazione 11 è (2, 4, 1, 3):

$$a(12,1)=\left[\frac{12-1}{(4-1)!}\right]+1=\left[\frac{11}{6}\right]+1=2;$$

$$\left\{\frac{12-1}{(4-2)!}\right\}\neq 0\Rightarrow a(12,2)=a(11,2)=4;$$

$$\left\{\frac{12-1}{(4-3)!}\right\}=0,\left\{\frac{12-1}{(4-3+1)!}\right\}\neq 0\Rightarrow a(12,3)=$$

$$=\min((\{1,2,3,4\}\setminus\{2,4\})\setminus\{1\})=3$$

$$\left\{\frac{12-1}{(4-4)!}\right\}=0,\left\{\frac{12-1}{(4-4+1)!}\right\}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a(12,4)=\min(\{1,2,3,4\}\setminus\{2,4,3\})=1$$

Pertanto, riarrangiamento viene scritto nella forma (2, 4, 3, 1).

Teorema 2. Nell'elenco di permutazioni in ordine lessicografico successiva, numero permutazioni $(a_1, a_2, ..., a_n)$ è dato da:

$$i=(a_1-1)\cdot(n-1)!+\sum_{k=2}^{n-2}|\{1,...,a_k\}\setminus\{a_1,...,a_k\}|\cdot$$
$$\cdot(n-k)!+a,$$

dove le parentesi indicano l'alimentazione diretta del set,

$$a=\begin{cases}1, & если\ a_{n-1}<a_n\\ 2, & если\ a_{n-1}>a_n\end{cases}$$

Obiettivo. Che è una permutazione di permutazione (4, 2, 1, 5, 6, 3) nella lista delle permutazioni in ordine lessicografico delle seguenti?

Soluzione. Trova il numero di permutazioni

Per il Teorema 1, $i=389$ con n = 6, tra parentesi angolari di supporto calcoli, si ottiene: $a_1=\left[\frac{388}{5!}\right]+1=4;$

$$a_2=\left\langle\left\{\frac{388}{4!}\right\}\neq 0\right\rangle=a(388,2)=2;$$

$$a_3=\left\langle\left\{\frac{388}{3!}\right\}\neq 0\right\rangle=a(388,3)=1;$$

$$a_4=\left\langle\left\{\frac{388}{2!}\right\}=0,\left\{\frac{388}{3!}\right\}\neq 0\right\rangle=\min((\{1,2,3,4,5,6\}\setminus$$
$$\setminus\{4,2,1\})\setminus(1,2,3,4,5\})=6;$$

$$a_5=\left\langle\left\{\frac{388}{1!}\right\}=0,\left\{\frac{388}{2!}\right\}=0\right\rangle=\min\{4,2,1,6\}=3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_6=5$$

A: (4, 2, 1, 6, 3, 5)

§ 2. Procedura di Antilessicalegrafica

Permutazioni matrice nel seguente [3] procedura anti-lessicale e grafica genera il seguente algoritmo.

Passo 1. I valori n della colonna vengono $(n-1)!$ scritti n, i valori $(n-1)!$ e così $n-1$ via, per i $(n-1)!$ valori 1 e

$$a(i,n)=n-\left[\frac{i-1}{(n-1)!}\right]\qquad i=\overline{1,n!}$$

compreso m. E., Le parentesi quadre indicano la parte intera. Accettato $k=n-1$.

Passo 2. Nella colonna k sono scritti sequenzialmente $(k-1)!$ sui valori massimi ξ dell'ordine del set $\{1,2,...,n\}\setminus\{a(i,k+1),...,a(i,n)\}$, $\xi=\overline{1,k}$ che si ripete una volta $\left\{\frac{i-1}{(n-k+1)!}\right\}=0$.

Fase 3. Se $k>1$, poi $k:=k-1$ passo 2, altrimenti stop.

Teorema 3. Per gli elementi $a(i,j)$ della permutazione nella seguente procedura antilessicalegrafica viene eseguita: $a(i,n)=n-\left[\frac{i-1}{(n-1)!}\right],\ i=\overline{1,n!}$.

quando $\left\{\frac{i-1}{(n-j)!}\right\}\neq 0$.

allora

$$a(i,n-j+1)=a(i-1,n-j+1),\quad j=\overline{2,n}.$$

quando $\left\{\frac{i-1}{(n-j)!}\right\}=0$,

$$\left\{\frac{i-1}{(n-j+1)!}\right\} \neq 0 .$$ quando

$$\left\{\frac{i-1}{(n-j)!}\right\} = 0 , \left\{\frac{i-1}{(n-j+1)!}\right\} = 0 ,$$

allora

$$a(i,n-j+1) = \max(\{1,2,\ldots,n\} \setminus \{a(i,n-j+2),\ldots,a(i,n)\})$$

Troviamo, per esempio, il 12 ° permutazione degli elementi 1, 2, 3, 4 modo quando segue permutazioni di antilessicografico, considerando che la permutazione 11 è (2, 4, 1, 3)

$$a(12,4) = 4 - \left[\frac{12-1}{(4-1)!}\right] = 4 - 1 = 3;$$

$$\left\{\frac{12-1}{(4-2)!}\right\} \neq 0 \Rightarrow a(12,3) = a(11,3) = 1:$$

$$\left\{\frac{12-1}{(4-3)!}\right\}=0, \left\{\frac{12-1}{(4-3+1)!}\right\} \neq 0 \Rightarrow a(12,2) = \max(\{1,2,3,4\} \setminus \{1,3\}) \setminus \{4\} = 2$$

$$\left\{\frac{12-1}{(4-4)!}\right\}=0, \left\{\frac{12-1}{(4-4+1)!}\right\}=0 \Rightarrow a(12,1) = \max\{1,2,3,4\} \setminus \{1,3,2\} = 4$$

Pertanto, riarrangiamento viene scritto nella forma (4, 2, 1, 3).

Teorema 4. Numero di $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ permutazioni nella lista di permutazioni nel seguente ordine anti-lessicale grafica è data da:

$$i = (n - a_n) \cdot (n-1)! + \sum_{k=2}^{n-2} |\{a_{n-k+1},\ldots,n\} \setminus \{a_{n-k+1},\ldots,a_n)| \cdot (n-k)! + a,$$

dove le parentesi indicano l'alimentazione diretta del set,

$$a = \begin{cases} 1, & если \ a_1 < a_2 \\ 2, & если \ a_1 > a_2 \end{cases}$$

Obiettivo. Che è una permutazione di permutazione (4, 2, 1, 5, 6, 3) nella lista di permutazioni nel seguente modo antilessicale e grafica?

Soluzione. Trova il numero di permutazioni del set:

$$i = (6-3) \cdot 5! + |\{6\} \setminus \{6,3\}\} | \cdot 4! + |\{5,6\} \setminus \{5,6,3\}\} | \cdot 3! + |\{1,2,3,4,5,6\} \setminus \{1,5,6,3\}\} | \cdot 2! + 2 = 366$$

Per il Teorema 3, quando $i = 367$, n = 6, si ottiene:

$$a_6 = 6 - \left[\frac{366}{5!}\right] = 3$$

$$a_5 = \left\langle \left\{\frac{366}{4!}\right\} \neq 0 \right\rangle = a(366,2) = 6$$

$$a_4 = \left\langle \left\{\frac{366}{3!}\right\} = 0, \left\{\frac{366}{4!}\right\} \neq 0 \right\rangle = \max((\{1,2,3,4,5,6\} \setminus \{3,6\}) \setminus \{5,6\}) = 4$$

$$a_3 = \left\langle \left\{\frac{366}{2!}\right\} = 0, \left\{\frac{366}{3!}\right\} = 0 \right\rangle = \max(\{1,2,3,4,5,6\} \setminus \{4,6,3\}) = 5$$

$$a_2 = \left\langle \left\{\frac{366}{1!}\right\} = 0, \left\{\frac{366}{2!}\right\} = 0 \right\rangle = \max(\{1,2,3,4,5,6\} \setminus \{5,4,6,3\}) = 2 \Rightarrow a_1 = 1$$

Risposta: (1, 2, 5, 4, 6, 3).

References:

1. Jonsons S.M. 1963. Generation of permutations by adjacent transpositions. p. 282-285.
2. Knut D. 2007. Art of Computer Programming. Generating all tuples and permutations. Translated from English. 160.
3. Lipsky V. 1988. Combinatorics for Programmers. 213 p.
4. Novikov F.A. 2000. Discrete mathematics for programmers. 304 p.
5. Reinhold E., Nivergelt Yu., Deo N. 1980. Combinatorial Algorithms. Theory and practice. Translated from English. 477.