Peer Reviewed, Open Access, Free Online Journal
Published monthly : ISSN: 2308-832X
Issue 10(19); October 2014

Original Article: ALCUNE PROPRIETÀ ESTREMALI DELLE CARATTERISTICHE MEDIE DELLE STATISTICHE SERIE VARIAZIONALI

Citation
Khatskevich V.L. Alcune proprietà estremali delle caratteristiche medie delle statistiche serie variazionali. *Italian Science Review.* 2014; 10(19). PP. 38-46.
Available at URL: http://www.ias-journal.org/archive/2014/october/Khatskevich.pdf

Author
Vladimir L. Khatskevich, Voronezh State University, Russia.

Submitted: September 20, 2014; Accepted: September 27, 2014; Published: October 9, 2014

Introduzione. Proprietà estremi della media aritmetica e le sequenze numeriche finali mediani sono ampiamente conosciuti e utilizzati nelle statistiche [1] - [3]. Inoltre, ci sono le proprietà estreme l'attesa e la mediana della variabile casuale. Tuttavia, per le caratteristiche medie della serie variazionale corrispondente risultati sono meno studiato, nonostante la presenza di un classico [1]. In questo articolo discuteremo alcuni dei risultati noti in questo campo e impostare nuove proprietà estremi della serie media variazionale analitica e strutturale.

Lasciate che $x_1, x_2, ..., x_n$ - dati i numeri, disposti in ordine di età $x_1 < x_2 < ... < x_n$, e $p_1, p_2, ..., p_n$ - data numeri positivi. Si consideri la variazione (frequenza) gamma di $\begin{matrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{matrix}$. (1)

Media ponderata è definito da $\bar{x} = \dfrac{p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n}$. (2)

Si consideri la deviazione standard ponderata in funzione $x_1, x_2, ..., x_n$ del numero di un certo valore x

$$\rho^2(x) = \sum_{k=1}^{n} p_k (x_k - x)^2 \quad (3)$$

dove $p_1, p_2, ... p_n$ - data numeri positivi.

Come è noto (vedi [1], capitolo 1, § 5; [2]), la seguente proprietà caratteristica-meccanica del aritmetica ponderata media:

Teorema 1 La deviazione standard ponderata (3) raggiunge un minimo a, definito $x = \bar{x}$ dalla formula (2).

Un modo per dimostrare il Teorema 1 è quello di applicare la formula

$$\rho^2(x) = \rho^2(\bar{x}) + (\bar{x} - x)^2 \sum_{i=1}^{n} p_i \,.$$

Teorema 1. implica le altre proprietà estreme di medie ponderate (v., Esempio., Il lavoro dell'autore [4]). In particolare, si considera la media armonica delle variazioni di (1). In questo caso, si assume che i numeri dati sono $x_1, x_2, ..., x_n$ positivi. Inoltre, prendere in considerazione gli interi positive $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$. Ponderata media armonica è definita da

$$\bar{x}_{\text{гар.}} = (\omega_1 + \omega_2 + ... + \omega_n) \Big/ \left(\frac{\omega_1}{x_1} + \frac{\omega_2}{x_2} + ... + \frac{\omega_n}{x_n} \right).$$

Put $p_k = \frac{\omega_k}{x_k}$. Nella nuova notazione $\bar{x}_{гар.}$ assume la forma (2) ponderato A media aritmetica shennoy con i pesi p_k. Pertanto, Teorema 1 implica

Corollario 1. La media ponderata armonica-zione minimizza la deviazione standard ponderata $\sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_k}{x_k}(x_k - x)^2$.

.

La mediana di una sequenza x_1 x_2 ... x_N monotona crescente contenente un numero dispari di membri, ha chiamato la durata media della sequenza con la camera $m = \frac{n+1}{2}$. Nel caso di un numero pari di componenti per la mediana accettato di media aritmetica $\frac{1}{2}(x_m + x_{m+1})$.

E 'ampiamente noto proprietà caratteristica di una estrema mediana: la somma dei valori assoluti $\sum_{i=1}^{n} |x - x_i|$ delle deviazioni dai valori mediani di vari è la più piccola.

La prova di questa affermazione è data, ad esempio, in [1], [2].

1. La proprietà caratteristica di una serie di variazioni estreme mediana. Si consideri l'aspetto di questa proprietà alla frequenza della serie (1), quando la frequenza $p_1, p_2, \ldots, p_n$ - i numeri naturali, e la somma delle frequenze $\sum_{i=1}^{n} p_i = N$. Nel caso di un valore N mediano dispari x_m è determinato dalle seguenti disuguaglianze $p_1 + p_2 + \ldots + p_{m-1} < \frac{N+1}{2}$;

$p_1 + p_2 + \ldots + p_m \geq \frac{N+1}{2}$. (4)

Per anche avere N due possibilità. La prima è che per circa k due condizioni sono soddisfatte $p_1 + p_2 + \ldots + p_{k-1} < \frac{N}{2}$,

$p_1 + p_2 + \ldots + p_k > \frac{N}{2}$. (5)

In questo caso, il valore mediano $x_m = x_k$.

La seconda possibilità è quella di correre per una certa k relazione-zione (nel caso di incerta mediana) $p_1 + p_2 + \ldots + p_{k-1} < \frac{N}{2}$,

$p_1 + p_2 + \ldots + p_k = \frac{N}{2}$. (6)

In questo caso, la mediana può prendere qualsiasi numero nell'intervallo (x_k, x_{k+1}). Di solito preso $\frac{1}{2}(x_k + x_{k+1})$, anche se ci sono altri approcci. Qui di seguito in Osservazione 1, offriamo la nostra scelta mediana nel caso indeterminato.

Teorema 2. (di proprietà Extremal del numero medio di varianti). Somma ponderata dei valori assoluti $\sum_{i=1}^{n} |x - x_i| p_i$ delle deviazioni dei valori medi di un numero è il più piccolo, cioè, $\sum_{i=1}^{n} |x_m - x_i| p_i \leq \sum_{i=1}^{n} |x_s - x_i| p_i$ ($\forall s = 1,2,..n$). (7)

In questo caso, l'uguaglianza in (7) è possibile solo nel caso della mediana incerto quando $s = k$ o $s = k+1$.

La prova di questa affermazione non è ampiamente disponibile. Il campione, nel famoso libro [1], [2] si afferma, ma si è rivelato solo per le sequenze numeriche. Offriamo la nostra prova, e per soffermiamo sul caso non banale di incerta (multivalore) della mediana. Sottolineiamo che il nostro metodo di prova permette di studiare le proprietà di altri mezzi estremi, in particolare, i valori di separazione.

Dimostrazione del Teorema 2. Per distinguere i casi di pari e dispari nella N dimostrazione del Teorema 2, le proprietà della mediana (4), (5) possono essere sì-tino in forma di $p_1 + p_2 + ... + p_{m-1} < p_m + ... + p_n$ e $p_1 + p_2 + ... + p_m > p_{m+1} + ... + p_n$. (8)

O se mediano incerto (6) $p_1 + p_2 + ... + p_{k-1} < p_k + ... + p_n$ e $p_1 + p_2 + ... + p_k = p_{k+1} + ... + p_n$. (9)

Supponiamo che (8) x_m - la mediana. Noi fissiamo il termine della stanza s. Si consideri la deviazione

$$\Delta_s = \sum_{i=1}^{n} |x_s - x_i| p_i = \sum_{i=1}^{s} (x_s - x_i) p_i + \sum_{i=s+1}^{n} (x_i - x_s) p_i$$
.

Sia $s > m$ (cioè $x_s > x_m$). poi

$$\sum_{i=1}^{s} (x_s - x_i) p_i = \sum_{i=1}^{m} (x_s - x_i) p_i + \sum_{i=m+1}^{s} (x_s - x_i) p_i$$

e

$$\sum_{i=s+1}^{n} (x_i - x_s) p_i = \sum_{i=m+1}^{n} (x_i - x_s) p_i - \sum_{i=m+1}^{s} (x_i - x_s) p_i$$
.

Pertanto

$$\Delta_s = \sum_{i=1}^{m} (x_s - x_i) p_i + \sum_{i=m+1}^{n} (x_i - x_s) p_i + 2 \sum_{i=m+1}^{s} (x_s - x_i) p_i$$

Il primo e il secondo termine può essere rappresentato, rispettivamente, come

$$\sum_{i=1}^{m} (x_s - x_i) p_i = \sum_{i=1}^{m} (x_m - x_i) p_i + (x_s - x_m) \sum_{i=1}^{m} p_i$$

e

$$\sum_{i=m+1}^{n} (x_i - x_s) p_i = \sum_{i=m+1}^{n} (x_i - x_m) p_i + (x_m - x_s) \sum_{i=m+1}^{n} p_i$$

Poi

$$\Delta_s = \sum_{i=1}^{n} |x_m - x_i| p_i + 2 \sum_{i=m+1}^{s} (x_s - x_i) p_i + (x_s - x_m) \left(\sum_{i=1}^{m} p_i - \sum_{i=m+1}^{n} p_i \right)$$
. (10)

Per ipotesi, il secondo termine è non-negativo (se $s = m + 1$ è uguale a zero). L'ultimo termine è positivo a causa della assunzione $x_s > x_m$ e la seconda disuguaglianza di (8). Così, $s > m$ quando la relazione (7).

Per $s < m$ come nel precedente, abbiamo

$$\Delta_s = \sum_{i=1}^{n} |x_m - x_i| p_i + 2 \sum_{i=s+1}^{m} (x_i - x_s) p_i + (x_m - x_s) \left(\sum_{i=m+1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} p_i \right)$$
.

Abbiamo riscrivere questa equazione nella forma

$$\Delta_s = \sum_{i=1}^{n} |x_m - x_i| p_i + 2 \sum_{i=s+1}^{m-1} (x_i - x_s) p_i + (x_m - x_s) \left(\sum_{i=m}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m-1} p_i \right)$$
. (11)

Per ipotesi, il secondo termine sul lato destro della (11) è non-negativo (se $s + 1 = m$ non è disponibile). Positività del terzo termine implica l'assunzione $x_m - x_s > 0$ e la prima disuguaglianza di (8).

Supponiamo che per k alcune relazioni (9) (caso di indeterminatezza-Universe mediana). Consideriamo il caso $m = k$. Poi la $s > m$ stima (7) Accetta soffiaggio (10) e il lato destro della (9). Si noti che per la $s = k + 1$ disuguaglianza No. (7) diventa un'uguaglianza. Quando la stima $s < m$ (7) segue da (11) e il lato sinistro della (9).

Nel caso $m = k + 1$ in cui la $s > m$ stima (7) segue da (10) e il lato destro della formula (9), e in $s < m$ (11) e il lato destro della formula (9). Si noti che $s = k$ la disuguaglianza (7) diventa un'uguaglianza. Il teorema è dimostrato.

Continuare a studiare il caso di incerta mediana.

Corollario 2. Supponiamo che per qualche relazione k relazioni misura positivi (9) x - un numero arbitrario (x_k, x_{k+1}). Poi soddisfa il valore estremo (7) nella forma

$$\sum_{i=1}^{n} |x - x_i| p_i < \sum_{i=1}^{n} |x_s - x_i| p_i \quad (\forall s \neq k, k+1)$$
.

Nel caso $s = k$ in cui $s = k + 1$ sia la disuguaglianza diventa un'uguaglianza.

Infatti, per ipotesi $\alpha \in (0,1)$, esiste tale che $x = \alpha x_k + (1 - \alpha) x_{k+1}$.

Quindi, in base a quanto sopra $s \neq k, k+1$, per tutto possiamo scrivere

$$\sum_{i=1}^{n} |x - x_i| p_i < \alpha \sum_{i=1}^{n} |x_s - x_i| p_i + (1 - \alpha) \sum_{i=1}^{n} |x_s - x_i| p_i = \sum_{i=1}^{n} |x_s - x_i| p_i$$
,

il che implica che questa affermazione.

Corollario 3. Supponiamo di avere un arbitrario $y \in (x_1, x_n)$, quindi la proprietà

estremale della mediana x_m ha la forma
$$\sum_{i=1}^{n}|x_m - x_i|p_i \le \sum_{i=1}^{n}|y - x_i|p_i \quad (12)$$

Infatti, per ipotesi, esiste un numero naturale tale che $1 < s < n$ e $y \in (x_s, x_{s+1})$. Pertanto $\beta \in (0,1)$, per alcuni avere $y = \beta x_s + (1-\beta)x_{s+1}$. Rascerca espressione
$$\sum_{i=1}^{n}|y - x_i|p_i = \sum_{i=1}^{s}(y - x_i)p_i + \sum_{i=s+1}^{n}(x_i - y)p_i$$
.

Sostituendo la y corrispondente combinazione convessa di elementi x_s, x_{s+1}, otteniamo
$$\sum_{i=1}^{n}|y - x_i|p_i = \beta\sum_{i=1}^{n}|x_s - x_i|p_i + (1-\beta)\sum_{i=1}^{n}|x_{s+1} - x_i|p_i$$
.

Uso per ciascuno dei componenti del lato destro della disuguaglianza (7), si ottiene (12).

Nota 1. Se N il caso è resa ancora e incertezza mediana (6) nella gamma di frequenze, quindi l'intervallo (x_k, x_{k+1}) di come l'autore suggerisce la scelta mediana $\frac{1}{p_k + p_{k+1}}(p_k x_k + p_{k+1} x_{k+1})$. Questa espressione si trasforma $\frac{1}{2}(x_k + x_{k+1})$ in quando $p_k = p_{k+1} = 1$. C'è un altro approccio che tiene conto della distanza x_1 degli elementi x_N iniziali e finali. Vale a dire (x_k, x_{k+1}), come parte dello $\frac{1}{r_1 + r_2}(r_1 x_k + r_2 x_{k+1})$ slot prendendo, in cui $r_1 = x_k - x_1$, a $r_2 = x_N - x_{k+1}$. O viceversa $\frac{1}{r_1 + r_2}(r_2 x_k + r_1 x_{k+1})$.

Nota 2. Sotto l'ipotesi della relazione (8) o (9), tutti gli argomenti del Teorema 2 sono adatti per tutti i pesi positivo (non necessariamente integrale) p_i.

2. Applicazione del Teorema 2. Si consideri una discrete ξ variabile casual x_i a valori con probabilità p_i $(i = 1,2,...,n)$. Let $F(x)$ - funzione di ripartizione della variabile casuale. Come è noto, [5] mediana della distribuzione viene $F(x)$ chiamato x_m argomento per cui le disuguaglianze
$$F(x_m) \le \frac{1}{2} \le F(x_m + 0). \quad (13)$$

Come conseguenza del Teorema 2 otteniamo

Adozione di 1. Tempo assoluto variabile casuale discreta assume $M|\xi - c| = \sum_{i=1}^{n}|x_i - c|p_i$ un valore minimo, se scelto per essere la mediana della distribuzione.

Infatti, per una variabile casuale discrete $F(x) = \sum_{x_i < x} p_i$. Pertanto, la condizione (13) indica che le disuguaglianze $\sum_{i=1}^{m-1} p_i \le \frac{1}{2} \le \sum_{i=1}^{m} p_i$. Poiché $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, ne consegue che le condizioni (7) e (8). Pertanto, Teorema 2 implica questa affermazione.

Questo risultato può essere facilmente generalizzato al caso in cui un quantitativo evento-valore discreto prende un numero numerabile di valori $x_1, x_2, ..., x_n$, ..., e $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Notiamo che in [6] e altre fonti mostra il risultato di una media di proprietà estremale per il continuo (ed è continuo) variabili casuali. Corrispondente per le variabili casuali discrete a causa della loro specificità di proprietà, a quanto pare non precedentemente osservato.

Consideriamo il caso di vettore media aritmetica e la mediana. Supponiamo che ci viene m dato un insieme di vettori dimensionali $X^1, X^2, ..., X^n$ e numeri positive $p_1, p_2, ... p_n$. Media ponderata di questi vettori è un vettore $\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n} p_j X^j$, dove $N = \sum_{j=1}^{n} p_j$.

Nella norma spazio R^m vettoriale X $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{m}|x_i|$ e $\|X\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{m}|x_i|^2\right)^{1/2}$.

Dal momento $\| \ \|_2$ che la norma euclidea, secondo la carta d'autore [4], abbiamo

Adozione di 2. Vettore $\overline{X}$ minimizza la deviazione ponderata $\delta_2(X) = \left(\sum_{j=1}^{n} p_j \|X - X^j\|_2^2\right)^{1/2}$.

Consideriamo una deviazione $\delta_1(X) = \sum_{j=1}^{n} p_j \|X - X^j\|_2$. Nel libro [1] propone una definizione di mediana vettore Ch.III come il vettore che minimizza la deviazione $\tilde{\delta}_1(X) = \sum_{j=1}^{n} p_j \|X - X^j\|_1$. Consideriamo una deviazione. Risulta che minimizza il vettore con le coordinate del mediano unidimensionale.

Infatti, anche quando i vettori X^j sono $j = 1,2,...,n$ della forma $X^j = (x_1^j, x_2^j, ..., x_m^j)$. Organizziamo i numeri x_1^1, x_1^2, ..., x_1^n in ordine crescente, e scegliere tra loro il mediano $\tilde{x}_1$. Allo stesso modo, si procede con le coordinate x_2^1, x_2^2, ..., x_2^n. Indichiamo la mediana $\tilde{x}_2$ corrispondente e così via fino x_m^1, x_m^2, ..., x_m^n con una mediana di un aggregato graduate $\tilde{x}_m$. Vector $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_m)$ è chiamata la mediana.

Asserzione 3. Mediana vettore $\tilde{X}$ minimizza la deviazione $\tilde{\delta}_1(X) = \sum_{j=1}^{n} p_j \|X - X^j\|_1$.

Questa offerta è valida in vista delle proprietà estreme del mediano applicato coordinata-saggio come $\tilde{\delta}_1(X) = \sum_{j=1}^{n} p_j \sum_{i=1}^{m} |x_i - x_i^j| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_j |x_i - x_i^j|$

Ritorno allo studio della frequenza delle serie (1). Dividendo il valore della frequenza di (1) con termini positivi si chiama un valore che soddisfi le $x_k = r$ seguenti disuguaglianze cm. [1] Ch.I, § 3

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_{k-1} p_{k-1} < x_k p_k + ... + x_n p_n \quad (14)$$

e

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_k p_k > x_{k+1} p_{k+1} + ... + x_n p_n \quad (15)$$

Se, invece della seconda disuguaglianza

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_k p_k = x_{k+1} p_{k+1} + ... + x_n p_n \quad (16)$$

dividendo il valore è un numero nell'intervallo (x_k, x_{k+1}), in particolare $\frac{1}{2}(x_k + x_{k+1})$.

Nota 3. Se la cassa è in separazione di incertezza nella gamma di frequenza di valori, l'intervallo (x_k, x_{k+1}) come un valore di processo spogliato, come in Osservazione 2, l'autore raccomanda di scegliere una equilibrata, tenendo conto delle dimensioni x_k e x_{k+1} combinazione convessa di elementi.

Teorema 3. Nel caso di positività $x_1, x_2, ..., x_n$ di tutti i numeri di una somma ponderata dei valori assoluti $\sum_{i=1}^{n}|x - x_i| x_i p_i$ delle deviazioni dai valori di alcuni valori della separazione è la più piccola.

Questo risultato è, a nostra conoscenza, non precedentemente osservato, anche nel campo-dard (tutti $p_i = 1$) evento. Questa proprietà è una proprietà caratteristica dei valori di separazione. Può essere utilizzato in problemi logistici, come è il caso con la mediana. (Vedi, per esempio. [3]).

Dimostrazione del Teorema 3 e Nota 2 ripete la dimostrazione del Teorema 2, se introduciamo la notazione e in tutte le

$x_i p_i = q_i \ (i=1,2,...,n)$ formule del Teorema 2 invece di p_i scrivere q_i.

3. Alcune relazioni tra la media. La distanza tra la media aritmetica è la $\bar{x}$ frequenza di (1) e la sua mediana Me è stimata come segue, interessante a nostro parere, la dichiarazione.

Teorema 4. Dato un intervallo di frequenza (1). Abbiamo la stima

$$|\bar{x} - Me| \le \frac{1}{2}\max\{x_n - Me, Me - x_1\} \quad (17)$$

dove x_1 e x_n - il primo e l'ultimo termine della serie, rispettivamente.

Infatti, consideriamo il caso $N = \sum_{j=1}^{n} p_j$ di strano quando la mediana chiaramente perso. Let $Me = x_k$. Secondo la definizione (2) per $\bar{x}$ l'IMO-em

$$\bar{x} - x_k = \frac{1}{N}\left[\sum_{j=1}^{k}(x_j - x_k)p_j + \sum_{j=k+1}^{n}(x_j - x_k)p_j\right]$$

.

Quindi,

$$\bar{x} - x_k \le \frac{1}{N}\sum_{j=k+1}^{n}(x_j - x_k)p_j \le \frac{1}{N}(x_n - x_k)\sum_{j=k+1}^{n} p_j$$

. (18)

Si noti che la definizione della mediana (4) segue che

$$\sum_{j=k+1}^{n} p_j = N - \sum_{j=1}^{k} p_j \le N - \frac{N+1}{2} = \frac{N-1}{2} < \frac{N}{2}$$

.

Poi (18) implica il rapport $\bar{x} - x_k \le \frac{1}{2}(x_n - x_k)$.

Analogamente al precedente

$$x_k - \bar{x} = \frac{1}{N}\left[\sum_{j=1}^{k}(x_k - x_j)p_j + \sum_{j=k+1}^{n}(x_k - x_j)p_j\right] \le \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{k}(x_k - x_j)p_j$$

.

Quindi,

$$x_k - \bar{x} \le \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{k-1}(x_k - x_j)p_j \le \frac{1}{N}(x_k - x_1)\sum_{j=1}^{k-1} p_j$$

. (19)

Considerando $N = 2m+1$ la relazione (4), si ottiene $\sum_{j=1}^{k-1} p_j < \frac{N+1}{2} = m+1$. Perché $\sum_{j=1}^{k-1} p_j$ - intero non negativo, allora qui $\sum_{j=1}^{k-1} p_j \le m$. Poi (19) implica il rapport $x_k - \bar{x} \le \frac{1}{2}(x_k - x_1)$. Pertanto, nel caso di dispari N disuguaglianza (17) è stabilita. Se N anche e la relazione (5), la mediana è ancora univocamente determinata e la prova (17) è del tutto analogo al precedente.

Se (6) (caso di punto medio indeterminato) valore (17) è simile a quella precedente è fatto in forma

$$|\bar{x} - x_m| \le \frac{1}{2}\max\{x_n - x_m, x_m - x_1\}$$

$(m = k, k+1)$.

Introdurre qualsiasi element $x \in (x_k, x_{k+1})$ come combinazione x_k convessa di x_{k+1} entrambi, nonché utilizzando la relazione di cui sopra si ottiene (17) nel caso di incerta mediana. Il teorema è dimostrato.

Nota la relazione tra la media aritmetica delle variazioni di (1) e dividendo il valore di questa serie. In questo caso, consideriamo la serie di termini positivi che si trovano comunemente nelle statistiche.

Asserzione 4. Let $x_k = r$ - valore separazione delle variazioni di (1) con termini positivi, e $\bar{x}$ - media aritmetica della serie. Poi abbiamo la disuguaglianza

$$\frac{1}{N}\sum_{j=k+1}^{n} x_j p_j \le \frac{\bar{x}}{2}, \quad \frac{1}{N}\sum_{j=k}^{n} x_j p_j > \frac{\bar{x}}{2} \quad (20)$$

e $$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{k-1} x_j p_j < \frac{\bar{x}}{2}, \quad \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{k} x_j p_j \ge \frac{\bar{x}}{2}$$

(21)

dove $N = \sum_{j=1}^{n} p_j$.

Infatti, per definizione della media aritmetica e la base-NII (15) o (16) può essere scritta

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{k} x_j p_j + \frac{1}{N}\sum_{j=k+1}^{n} x_j p_j \ge \frac{2}{N}\sum_{j=k+1}^{n} x_j p_j$$

.

Pertanto, la vera disuguaglianza sinistra in (20). D'altro canto, sulla base di (14) possiamo scrivere la seguente relazione

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{k-1} x_j p_j + \frac{1}{N}\sum_{j=k}^{n} x_j p_j < \frac{2}{N}\sum_{j=k}^{n} x_j p_j$$

.

Pertanto, abbiamo il diritto di disuguaglianza in (20).

Inoltre, secondo la disuguaglianza sinistro (20) si ottiene la relazione

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{k} x_j p_j = \bar{x} - \frac{1}{N}\sum_{j=k+1}^{n} x_j p_j \geq \frac{\bar{x}}{2},$$

che implica il lato destro (21). Allo stesso modo, utilizzando il lato destro della disuguaglianza, (20) si ottiene

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{k-1} x_j p_j = \bar{x} - \frac{1}{N}\sum_{j=k}^{n} x_j p_j < \frac{\bar{x}}{2},$$

vale a dire lato sinistro (21).

Si noti che ciascuna delle condizioni (20) o (21) può essere preso come la definizione dei valori di separazione nel caso di una serie di frequenza a termini positivi.

Corollario 4. Per la serie variazionale con termini positivi disuguaglianza $\bar{x} < 2r$.

Infatti, secondo il lato destro della (21) la relazione

$$\frac{\bar{x}}{2} \leq \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{k} x_j p_j < \frac{1}{N} x_k \sum_{j=1}^{k} p_j < \frac{1}{N} x_k \sum_{j=1}^{n} p_j = x_k$$

,

e che implica la disuguaglianza sopra.

Si noti che la $\bar{x} < 2r$ disuguaglianza è abbastanza agitato, ma descrittivo. Qui di seguito indichiamo un rapporto più sottile, associato al risultato del seguente teorema 5.

Teorema 5. La variazione mediana di (1) con termini positivi e il suo r valore di separazione sono correlate $Me \leq r$.

Proof. Assumere il contrario. Lasciate che la mediana è determinato in modo univoco e $Me > r$. Se $Me = x_m$, mentre la $r = x_k$ disuguaglianza $Me > r$ indica che da $m > k$ qui $m \geq k+1$. Poi la parte sinistra della disuguaglianza (20) segue

$$\frac{x_m}{N}\sum_{j=m}^{n} p_j < \frac{1}{N}\sum_{j=m}^{n} x_j p_j \leq \frac{1}{N}\sum_{j=k+1}^{n} x_j p_j \leq \frac{\bar{x}}{2}$$

. (22)

In questo caso, secondo la (8) $\sum_{j=m}^{n} p_j > \sum_{j=1}^{m-1} p_j$. Quindi $2\sum_{j=m}^{n} p_j > N$. Poi la disuguaglianza (22) Vlegio $\frac{1}{2} x_m = \frac{1}{N} x_m \frac{N}{2} < \frac{1}{N} x_m \sum_{j=m}^{n} p_j < \frac{\bar{x}}{2}$.

Conseguenza $x_m < \bar{x}$.

D'altra parte, poiché l'per ipotesi $m-1 \geq k$, risulta dal lato destro della (21) segue che $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{m-1} x_j p_j > \frac{\bar{x}}{2}$. Poi abbiamo

$$\frac{x_{m-1}}{N}\sum_{j=1}^{m-1} p_j > \frac{\bar{x}}{2}. \quad (23)$$

In questo caso, secondo la (4) nel caso di $N = 2m+1$ avere dispari $\sum_{j=1}^{m-1} p_j < \frac{N+1}{2} = m+1$. Poi $\sum_{j=1}^{m-1} p_j \leq m < \frac{N}{2}$. E anche nel N caso di (5) pure $\sum_{j=1}^{m-1} p_j < \frac{N}{2}$. Pertanto, da (23) e la disuguaglianza si $x_m > x_{m-1}$ ottiene $\frac{x_m}{N} \cdot \frac{N}{2} > \frac{\bar{x}}{2}$ che $x_m > \bar{x}$. Insieme al precedente, questo dà una contraddizione, che nel caso della unicità della mediana risulta nostra teorema.

Lasciare la mediana non è univocamente determinato (nel caso in cui (6)). Quindi considerando l'articolo come combinazione convessa e così $x \in (x_k, x_{k+1})$ come in base alle relazioni sopra x_k x_{k+1} citate ed ottenere affermazione del teorema nel caso di incerta mediana. Il teorema è dimostrato.

Corollario 5. Nelle condizioni del Teorema 5, abbiamo la stima $\left|\bar{x}-x_k\right| \le \frac{2}{N} x_k \sum_{j=m}^{k} p_j$.

Infatti, secondo la condizione $m \le k$ e il secondo membro della (21) la seguente relazione

$$\frac{\bar{x}}{2} \le \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{k} x_j p_j \le \frac{x_k}{N}\sum_{j=1}^{k} p_j = \frac{1}{N} x_k \left(\sum_{j=1}^{m-1} p_j + \sum_{j=m}^{k} p_j\right).$$

Quindi, tenendo conto della $\sum_{j=1}^{m-1} p_j \le \frac{N}{2}$ disuguaglianza segue da (4) o (5) valutazione semi-denotano $\bar{x}-x_k \le \frac{2}{N} x_k \sum_{j=m}^{k} p_j$.

Inoltre, a seconda del lato sinistro (21) possiamo scrivere

$$\frac{\bar{x}}{2} \ge \frac{1}{N}\sum_{j=k+1}^{n} x_j p_j \ge \frac{x_{k+1}}{N}\sum_{j=k+1}^{n} p_j > \frac{x_k}{N}\sum_{j=k+1}^{n} p_j = \frac{x_k}{N}\left(\sum_{j=m}^{n} p_j - \sum_{j=m}^{k} p_j\right)$$

.

Così $\sum_{j=m}^{n} p_j \ge \frac{N}{2}$. Poi $\frac{\bar{x}}{2} > \frac{x_k}{N}\left(\frac{N}{2} - \sum_{j=m}^{k} p_j\right)$. Da quel $\bar{x}-x_k > -2\frac{x_k}{N}\sum_{j=m}^{k} p_j$ con il precedente comporta il corollario.

Corollario 6. Nelle condizioni del Teorema 5, abbiamo la stima $\left|\bar{x}-x_m\right| \le \frac{2}{N} x_k \sum_{j=m}^{k} p_j$.

Infatti, dalla (18) che il rapporto

$$\bar{x}-x_m \le \frac{1}{N}\sum_{j=m+1}^{n}\left(x_j - x_m\right)p_j = \frac{1}{N}\sum_{j=m}^{n}\left(x_j - x_m\right)p_j = \frac{1}{N}\sum_{j=m}^{n} x_j p_j - x_m \sum_{j=m}^{n} p_j$$

.

Combinando questo con (4) o (5) otteniamo $\bar{x}-x_m \le \frac{1}{N}\sum_{j=m}^{n} x_j p_j - \frac{x_m}{2}$.

Poiché per ipotesi-dizione $m \le k$, dato il lato destro (21) possiamo scrivere

$$\bar{x}-x_m \le \frac{1}{N}\sum_{j=m}^{k} x_j p_j + \frac{1}{N}\sum_{j=k+1}^{n} x_j p_j - \frac{x_m}{2} \le \frac{x_k}{N}\sum_{j=m}^{k} p_j + \frac{\bar{x}}{2} - \frac{x_m}{2}$$

.

Conseguenza $\bar{x}-x_m \le \frac{2}{N} x_k \sum_{j=m}^{k} p_j$.

Inoltre, analogamente a dimostrazione del Teorema 4 e secondo (4) o (5) abbiamo

$$x_m - \bar{x} \le \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{m-1}\left(x_m - x_j\right)p_j = \frac{x_m}{N}\sum_{j=1}^{m-1} p_j - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{m-1} x_j p_j \le \frac{x_m}{2} - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{m-1} x_j p_j$$

Poiché, per ipotesi $m \le k$, secondo il lato destro della (21)

$$x_m - \bar{x} \le \frac{x_m}{2} - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{k} x_j p_j + \frac{1}{N}\sum_{j=m}^{k} x_j p_j \le \sum_{j=1}^{m-1}\left(x_m - x_j\right)p_j = \frac{x_m}{2} - \frac{\bar{x}}{2} + \frac{x_k}{N}\sum_{j=m}^{k} p_j$$

Di conseguenza, $x_m - \bar{x} \le \frac{2}{N} x_k \sum_{j=m}^{k} p_j$ che insieme con l'affermazione precedente implica, delle indagini.

Illustriamo i risultati di questa sezione per i seguenti esempi.

Esempio 1: Si consideri la serie di numeri 2, 4, 5, 6, 8, 10, 12.

Per lui, la $\bar{x} = \frac{47}{7}$ media $Me = 6$ aritmetica, mediana, e come 2 + 4 + 5 + 6 <8 + 10 + 12 e 2 + 4 + 5 + 6 + 8> 10 + 12, il valore di separazione $r = 8$. Vediamo che, in conformità con il risultato di 4 $\bar{x} < 2r$, e secondo la teorema 5 $Me < r$. Inoltre, in conformità con il risultato di 5 $r - \bar{x} = 8 - \frac{47}{7} < \frac{2}{7}\cdot 8$, e in conformità con il risultato di 6 $\bar{x} - Me = \frac{47}{7} - 6 < \frac{2}{7}\cdot 8$.

Esempio 2: Si consideri la serie di numeri 3, 4, 5, 7, 9, 10.

Per lui $\bar{x} = \frac{38}{6} = \frac{19}{3}$. Poiché la mediana può essere preso un numero qualsiasi nell'intervallo (5,7). Come 3 + 4 + 5 <7 + 9 + 10 3 + 4 + 5 + 7 + 9 = 10, poi come la separazione valore può rimuovere qualunque numero nell'intervallo (7,9). Vediamo che $\bar{x} = \frac{19}{3} < 2\cdot 7$, che corrisponde al Corollario 4 Inoltre, un numero compreso tra l'intervallo (5,7) non è altro che un numero nell'intervallo (7,9), che corrisponde al Teorema 5 Per verificare Corollario 5 come scegliamo il centro dell'intervallo (7.9) $r = 8$, vale a dire . Poi

$r - \bar{x} = 8 - \frac{19}{3} < \frac{2}{6} \cdot 8$. Analogamente, per verificare l'indagine 6 come Me scegliere il centro dell'intervallo (5,7), cioè $Me = 6$. Poi $\bar{x} - Me = \frac{19}{3} - 6 < \frac{2}{6} \cdot 8$.

La relazione di cui sopra tra le caratteristiche medie della serie variazionale che non abbiamo visto. Essi sono più difficili da vedere rispetto a dimostrare. In conclusione, si nota il lavoro dell'autore [7], che discute il rapporto tra la mediana e le aspettative matematiche di variabili aleatorie continue.

References:

1. Jeanie K. 1970. Average values. 447 p.
2. Venetsky I.G. 1970. Variation series and their characteristics. 160 p.
3. ed. A.Ya. Boyarsky, G.L. Gromyko. 1985. General Theory of Statistics.
4. Hatskevich V.L. 2013. Some extremal properties of the average valuestions and expectations of random variables. v.9, p.39-44.
5. Korolyuk V.S., Portenko M.I., Skorokhod A.V., Turbin A.F. 1985. Compendium on probability theory and mathematical statistics. 640 p.
6. Gnedenko B.V. 2005. Course on probability theory. 448 p.
7. Hatskevich V.L., Agranovich Yu.Ya. 2013. Of extreme linkages medians and averages. Herald of the Voronezh State Technical University. v.9, p.31-33.